Université du Sud Toulon - Var
ISITV

Différences Finies
T.D. n°3

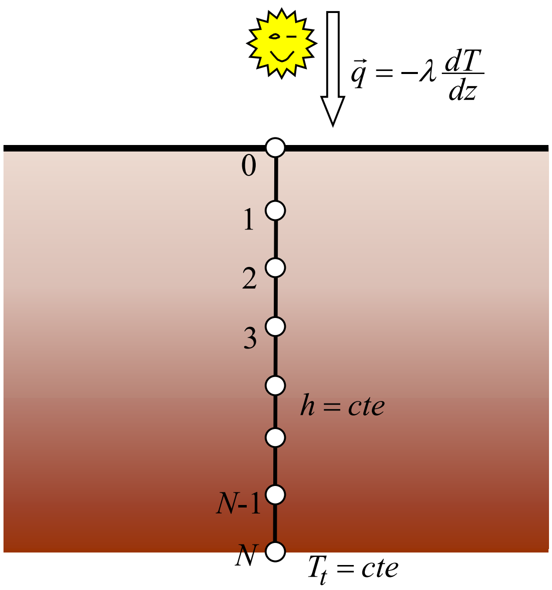
On considère une portion de sol terrestre, dont on veut connaître la répartition de température interne. La surface externe est seulement soumise à un rayonnement solaire $\vec{q}$ (pas d'échange de chaleur par convection). A une profondeur de 4 mètres, la température T_t peut être supposée constante. Le problème sera considéré unidimensionnel, c'est-à-dire qu'aucun flux de chaleur latéral n'existe. La température du sol obéit alors à l'équation aux dérivées partielles :

$$\rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Pour résoudre cette équation, on utilise la méthode des différences finies avec le schéma numérique suivant :

$$\left[T_{i,j+1} - T_{i,j}\right] = r\left[\mu\left(T_{i+1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i-1,j+1}\right) + (1-\mu)\left(T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}\right)\right]$$

où $\mu \in [0,1]$ (la consistance de ce schéma et sa stabilité ont été étudiées lors du T.D. n°2) et $r = \frac{k}{h^2}\frac{\lambda}{\rho c_P}$, avec $h = \Delta z$ et $k = \Delta t$.



a. Ecrire l'équation matricielle $A\vec{T}_{j+1} = B\vec{T}_j + \vec{C}$ correspondant au problème dans le cas général (N, h, k et μ quelconques), et tenant compte des conditions aux limites.

b. Ecrire un programme Matlab permettant de résoudre l'équation matricielle déterminée précédemment. A l'instant initial, la température du sol sera supposée homogène et égale à la température T_t. On donne les valeurs numériques suivantes :

$$\rho = 2100 kg/m^3,\ \lambda = 25 W/(m°K),\ c_P = 1300 J/(kg°K),\ q = 500 W/m^2,\ T_t = 13°C$$

Spatialement, le maillage est tel que : $N = 20,\ h = 0{,}2m$

c. Résoudre l'équation dans les cas suivants :

$t_f\ (h)$	μ	k(s)
10	0	1000
10	0	2000
10	0	2500
10	0	3000
10	1	1000
10	1	10000

Commenter les résultats obtenus d'un point de vue ''numérique''.

d. Avec un schéma implicite, résoudre l'équation dans les cas suivants :

$t_f\ (h)$
1
2
5
10
15
20

Commenter les résultats obtenus d'un point de vue ''physique''.

e. Pour une simulation plus réaliste, le flux de chaleur à la surface ne va plus être supposé constant , mais va varier suivant une loi sinusoïdale, telle que le maximum d'ensoleillement soit à $t = 12h$ ($q = 500W/m^2$, le soleil rayonne vers le sol) et le minimum soit à $t = 0h = 24h$ ($q = -500W/m^2$, le sol rayonne vers l'espace).

Modifier le programme pour prendre cette variation en considération.
Tracer les profils de températures dans le sol pour plusieurs heures différentes, sur une journée de simulation complète.